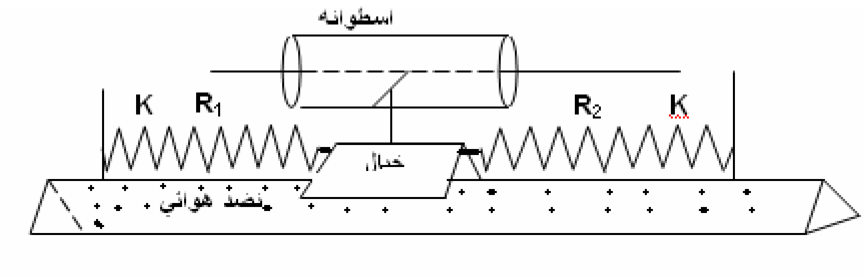
المتذبذبات الميكانيكية الحرة
Les oscillateurs mécaniques libres

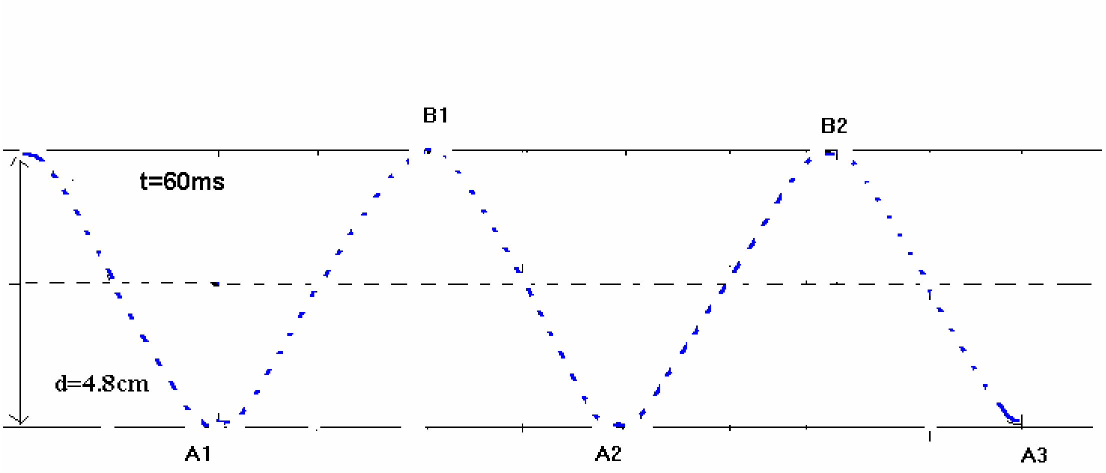
le pendule élastique hrizontal . النواس المرن الأفقي



I ـ الدراسة التجريبية

1 ـ التركيب التجريبي

عند إزاحة الخيال عن موضع توازنه بالمسافة X_m وتحريره بدون سرعة بدئية ، نلاحظ :
ـ الجسم (الخيال) S يتذبذب حول موضع توازنه تلقائيا .نقول أن الجسم S ينجز تذبذبات ميكانيكية حرة
المجموعة (نابض + حامل + جسم) تكون متذبذب ميكانيكي حر .
ـ عند تسجيل حركة إحدى نقط الخيال على الأسطوانة نحصل على التسجيل التالي :



2 ـ دراسة التسجيل

تمثل المسافة الفاصلة بين المستقيمين Δ_1 وΔ_2 طول مسار النقطة M .
حركة S تتكرر بكيفية مماثلة إذن فهي حركة دورية .
نعرف الدور T_0 بالمدة الزمنية الفاصلة بين لحظتين متتاليتين تمر فيهما نقطة من نقط الخيال بنفس الموضع وفي نفس المنحى .

$T_0=n.t$

N عدد المدد الفاصلة بين نقطتين متتاليتين خلال دور T_0

نضع $X_m=d/2$ تسمى X_m وسع الحركة Amplitude du mouvement

عندما نصل نقط الجسم فيما بينها نحصل على منحنى دي شكل جيبي وهو يمثل في نظمة محورين (Ot,Ox) مخطط المسافات بدلالة الزمن $x=f(t)$ لحركة S .

II ـ الدراسة التحريكية للنواس المرن الأفقي .

1 ـ المعادلة التفاضلية

نعتبر نواسا مرنا أفقيا مكونا من نابض مرن ذي لفات غير متصلة صلابته k وكتلته مهملة ، ومن جسم صلب S كتلته m .

نزيح الجسم S عن موضع توازنه بالمسافة x_m ثم نطلقه بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ t=0 .

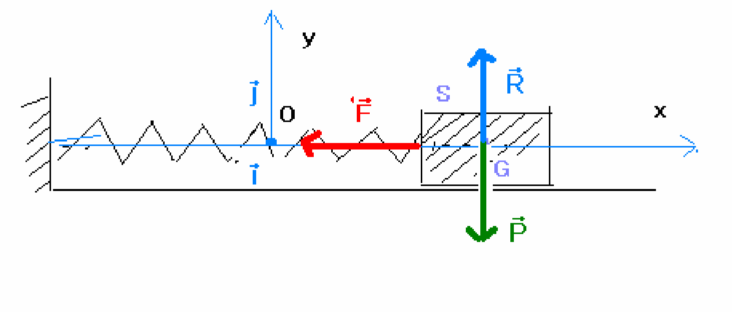
ندرس حركة S في معلم غاليلي $(O,\vec{i},\vec{j})$ مرتبط بالنضد ، حيث أصل المعلم متطابق مع مركز قصور G للجسم S .

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة المدروسة النواس المرن .

القوى الطبقة على الجسم :

- $\vec{P}$ وزن الجسم S
- $\vec{R}$ تأثير السحامل على الجسم

- $\vec{F}$ توتر النابض بحيث أن $\vec{F}=-K\overrightarrow{OG}$ ونلاحظ أن منحى القوة $\vec{F}$ دائما نحو موضع التوازن G ، تسمى $\vec{F}$ بقوة الإرتداد . Une force de rappelle بحيث $\overrightarrow{OG}=x\vec{i}$



المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}_G$

ــ إسقاط العلاقة على المحورين (Ox,Oy)

Ox -P+R=0

Oy $-kx\vec{i}=ma_x\vec{i}$

من العلاقة الثانية نحصل على :

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

نضع $\omega^2=\dfrac{k}{m}\Rightarrow \ddot{x}+\omega^2x=0(1)$

(1) تمثل المعادلة التفاضلية لحركة مركز القصور G للجسم S

2 ــ المعادلة الزمنية للحركة

في الدراسة التجريبية ، توصلنا أن مخطط المسافات x=f(t) منحى جيبي إذن من الممكن أن يكون حل المعادلة على الشكل التالي :

$$x=X_m\cos(\omega t+\varphi) \quad (2)$$

بحيث X_m و ω و φ ثوابت يجب تحديدها .

نعوض الحل (2) في المعادلة (1)

بحيث تتحقق هذه المعادلة إذا كانت $-m\omega^2\tilde{x}+kx=0$

$k=m\omega^2$

$\omega=\sqrt{k/m}$

وتسمى هذه الثابتة النبض الخاص لحركة المتذبذب ، ويرمز لها بω_0

وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي : rad/s

وتكتب المعادلة (2) على الشكل التالي :

$$x=X_m\cos(\omega_0t+\varphi)$$

x : تسمى استطالة الحركة elongation بحيث أن

$-X_m < x < +X_m$

X_m وسع الحركة وهي الاستطالة القصوية $X_m>0$

$(\omega_0 t+\varphi)$ طور الحركة التذبذبية

φ طور الحركة في أصل التواريخ

تتعلق قيمتا X_m و φ بالشروط البدئية للحركة (الموضع و السرعة)

*العلاقة بين ω_0 و T_0 الدور الخاص

$x(t)$ دالة دورية أي $x(t+T_0)= x(t)$

بما أن $x(t)$ دالة جيبية فدورها 2π

$x(t+T_0)= x(t)$

$X_m\cos(\omega_0 (t+T_0)+ \varphi) = X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$X_m\cos(\omega_0 t+ \omega_0 T_0 + \varphi) = X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$\omega_0 T_0=2\pi$

$T_0=2\pi/ \omega_0$

بحيث $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ الدور الخاص للتذبذبات T_0

التردد الخاص للتذبذبات هو :

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$ أي أن $N_0= 1/T_0$

نسمي المتذبذب الذي تكون معادلة حركته دالة جيبية بالنسبة للزمن متذبذبا توافقيا حرا .

* ملحوظة : مقارنة بين طور الاستطالة $x(t)$ و $x(t)$

$x(t)= X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$ نأخذ $\varphi=0$

$x(t)= X_m\cos \omega_0 t$ و $v_x = -X_m\, \omega_0 \sin \omega_0 t$

$v_x= X_m\, \omega_0 \cos(\omega_0 t+ \pi/2)$

$\Delta \varphi= (\pi/2)-0 \Leftrightarrow \Delta \varphi= (\pi/2)$

نقول أن $x(t)$ و $v(t)$ على تربيع في الطور . en quadrature de phase

$a(t) = -X_m\, \omega_0^2 \cos \omega_0 t \Leftrightarrow a(t)= - \omega_0^2 x(t)$

$\Delta \varphi= \pi$

$x(t)$ و $a(t)$ على تعاكس في الطور .

يمر مركز الخيال في اللحظة ذات التاريخ $t=0$ بالأصل O نحو الأفاصيل السالبة بالسرعة $v=40m/s$ وأن تردد الحركة $N=5Hz$

أكتب المعادلة الزمنية للحركة .

* المعادلة الزمنية لحركة الخيال حركة جيبية

$x=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$

* تحديد ω_0

$T_0=2\pi/ \omega_0$ أي أن $\omega_0= 2\pi N_0$

بما أن $\omega_0=10\ \pi \Leftrightarrow N_0=5Hz$

* تحديد φ

عند اللحظة $t=0$ أن $x(t)=0$

$x(0)=X_m\cos \varphi \Leftrightarrow X_m\cos \varphi=0$

$\Leftrightarrow \varphi=\pm\ \pi/2$

$t=0$ عندنا $v_x=0.4m/s<0$

أي أن $v_x= -X_m\, \omega_0 \sin (\omega_0 t+\varphi)$ عند اللحظة $t=0$ نجد أن $v_x= -X_m\, \omega_0 \sin\ \varphi<0$ أي أن $\sin \varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi= \pi/2$

* تحديد X_m

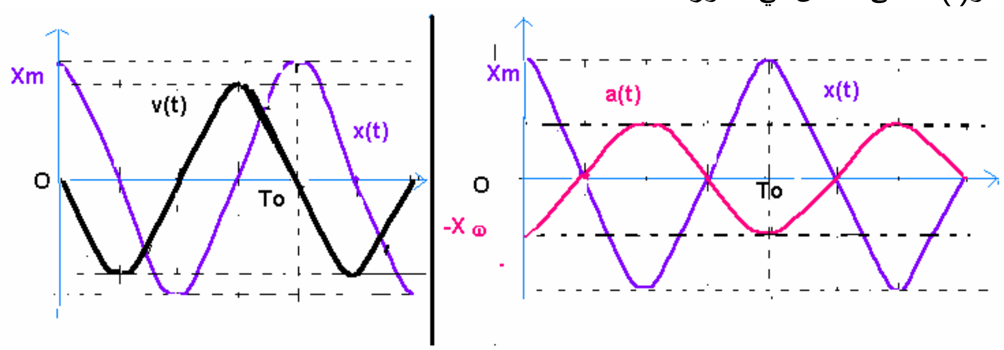
عند $t=0 \Leftrightarrow v_x=-0.4m/s$

$-0.4=-X_m\, \omega_0 \Leftrightarrow X_m=4/\pi$ cm

إذن المعادلة الزمنية للحركة

$x=(4/ \pi) \cos(10\ \pi t + \pi/2)$

أو $x=-(4/ \pi) \sin(10\ \pi t)$



III ـ الدراسة الطاقية

1 ـ طاقة الوضع المرنة

خلال التذبذبات الأفقية ، القوة الوحيدة التي تنجز شغلا هي قوة الارتداد $\vec{F}$. عند انتقال مركز قصور الخيال من $G_1\ (x_1)$ و $G_2(x_2)$.

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\Delta E_c = W(\vec{F})$$

$$W(\vec{F}) = E_{c2} - E_{c1} \Leftrightarrow W(\vec{F}) = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2$$

$$\dot{x}(t) = -X_m\omega_0 \sin\omega_0 t$$

$$W(\vec{F}) = \frac{1}{2}mX_m^2\omega^2\sin^2\omega t_1 - \frac{1}{2}mX_m^2\omega^2\sin^2\omega t_2$$

نضع $\sin^2\omega_0 t = 1 - \cos^2\omega_0 t \quad \text{et} \quad m\omega_0^2 = k$

$$W(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

الطرف الثاني من المعادلة يعبر عن تغيير طاقة الوضع المرنة للمتذبذب

$$\Delta E_c = E_{p1} - E_{p2}$$

ونستنتج : $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$

E_p طاقة الوضع المرنة فهي لا تتعلق إلا بموضع المتذبذب والثابتة C والتي نحددها باختيار الحالة المرجعية.

مثال للحالة المرجعية : عندما يكون النابض غير مطال ولا مكبوس $E_p=0$

$$l = l_0 (x=0) \Leftrightarrow C=0 \quad \Leftrightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

2 ـ الطاقة الميكانيكية للمتذبذب .

نعبر عن الطاقة الميكانيكية للمجموعة (الحامل ـ النابض ـ الجسم) بالعلاقة التالية :

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$ باعتبار أن $C=0$

في حالة إهمال الاحتكاكات خلال حركة المتذبذب فإن X_m تبقى ثابتة في كل لحظة أي أن هناك انخفاض الطاقة الميكانيكية

$$\Delta E_m = \Delta E_p + \Delta E_c = 0$$

$$\Delta E_p = -\Delta E_c$$

أي أنه خلال حركة المتذبذب تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة الوضع والعكس صحيح كذلك .

بين أن الطاقة الميكانيكية E_m للنواس المرن تكتب على الشكل التالي :

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2$$

3 ـ مخططات الطاقة .

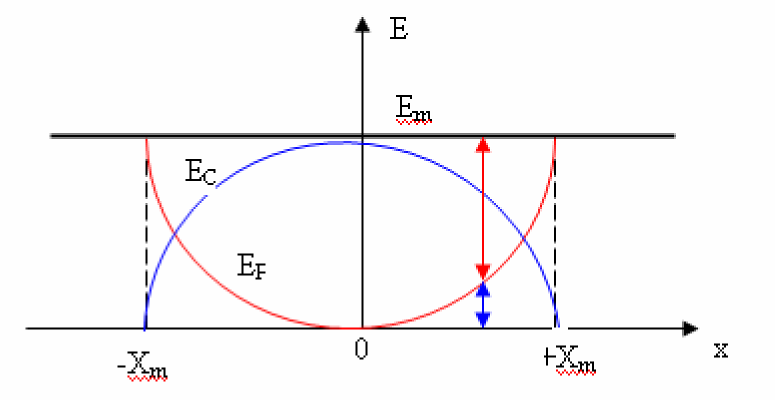
مخططات الطاقة هو التمثيل المبياني لمختلف أشكال الطاقة بدلالة الاستطالة x . (الطاقة الحركية ـ طاقة الوضع ـ الطاقة الميكانيكية) .

ـ طاقة الوضع المرنة $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ نحصل على شلجم بالنسبة $-X_m < x < +X_m$

ـ الطاقة الميكانيكية

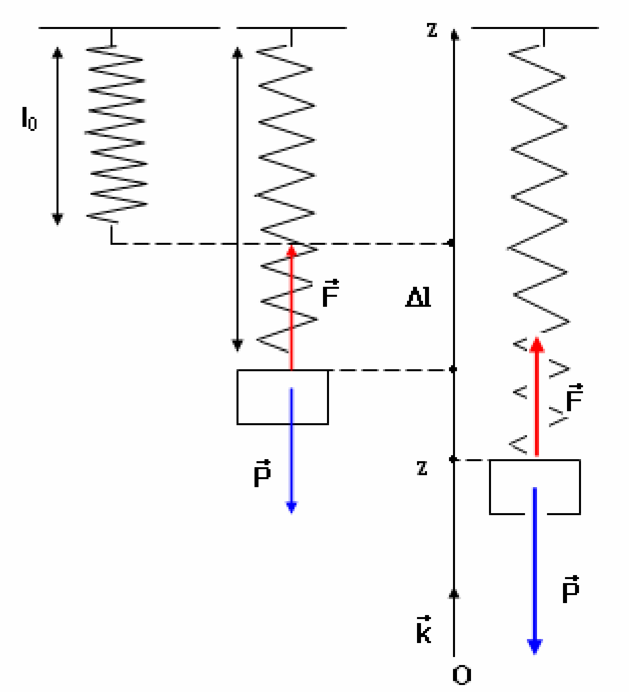
$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 = Cte$$

ـ الطاقة الحركية $E_p - E_c = E_m$ أي أن



E_c لا يمكنها أن تأخذ إلا قيما أصغر أو
مساوية للطاقة الميكانيكية لأن المجموعة تتذبذب بين موضعين أفضوليهما X_m و $-X_m$.
المجموعة تتذبذب في حويض للجهد أو داخل بئر للجهد
عندما يكون الحويض شلجميا نقول إن التذبذب توافقي Oscillateur harmonique

VI الدراسة التحريكية للنواس المرن الرأسي



جرد القوى المطبقة على الجسم
$\vec{P}$ و $\vec{F}$
عند التوازن $P=k.\Delta l$ أي أن $mg=k\Delta l$
في لحظة t الجسم يوجد تحت تأثير قوتين $\vec{P}$ و $\vec{F}$
نطبق العلاقة الأساسية للديناميك :
$\vec{F}+\vec{P}=m\vec{a}$
اسقاط العلاقة على Oz نحصل على :

$$-mg+F=m.a_z$$

$$F=k(\Delta l-z)$$

$$-mg+k\Delta l-kz=m\ddot{z}$$

عند التوازن $mg=k\Delta l$

$$kz+m\ddot{z}=0$$

$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0 \qquad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=0$$

استعمال الدراسة الطاقية
نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع النابض غير مطال
$z=z_0$
طاقة الوضع المرنة :

$$E_p=\frac{1}{2}k(z_0-z)^2+C$$

$$z=z_0\Rightarrow E_P=0\Rightarrow C=0$$

$$E_p=\frac{1}{2}k(z_0-z)^2$$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية $z=0$

$$E_p=mgz+C$$

$$z=0\Rightarrow E_p=0\Rightarrow C=0$$

$$E_P=mgz$$

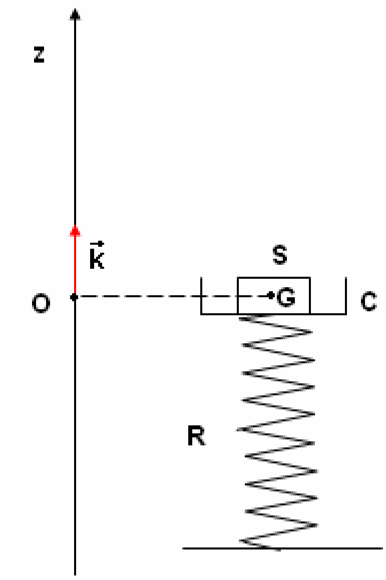
الطاقة الحركية هي $E_C=\frac{1}{2}mv^2$

الطاقة الميكانيكية للمجموعة (نابض جسم أرض) هي

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kz^2-kz_0z+\frac{1}{2}kz_0^2+mgz$$

تمرين 1

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$
يمثل الشكل جانبه جسم S نعتبره كنقطة مادية كتلته m_1 موضوع على كفة C ذات سمك صغير جدا وكتلتها m_2 ثبتت عند مركزها O إلى نابض R ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة وصلابة $k=300N/m$ يوجد في وضع رأسي .



توجد المجموعة في حالة توازن حيث ينتمي مركز قصورها G إلى نفس الخط الأفقي المار من O أصل معلم ثابت $(O,\vec{k})$.

1 ـ أوجد الإنضغاط $|\Delta\ell|$ للنابض بدلالة m_1 , m_2, g , k

أحسب $|\Delta\ell|$ علما أن $m_1=100g$ و $m_2=200g$

2 ـ عند اللحظة $t=0$ نقوم بضغط المجموعة (C ، S) نحو الأسفل وذلك بإعطائها سرعة بدئية V_0 فنحصل على حركة تذبذبية رأسية .

2 ـ 1 بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة أوجد المعادلة التفاضلية لحركة G . واستنتج الدور الخاص للحركة .

2 ـ 2 أوجد المعادلة الزمنية لهذه الحركة .

3 ـ نختار أصل المعلم كمرجع لطاقة الوضع وكذلك الطاقة المرنة .

3 ـ 1 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة واستنتج المعادلة التفاضلية باعتمادك على دراسة طاقية .

3 ـ 2 أحسب السرعة V التي ستمر بها لمجموعة من النقطة O للأول مرة .

3 ـ 3 بين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع a_i أكبر من a دون أن يغادر الجسم S الكفة C طالما أن قيمة a_i لاتتجاوز قيمة قصوية a_ℓ أحسبها . ما هو استنتاجك ؟

3 ـ تجريبيا عندما تمر المجموعة من النقطة O مباشرة ينفصل الجسم S عن الكفة . نقبل أن $z<0$ S و C يبقيا ملتصقين و $z>0$ S و C ينفصلان و $z=0$ S و C لهما نفس السرعة V .

نضع z_{max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم S و Z_{max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن تصل إليه الكفة والنابض .

اوجد تعبيري z_{max} و Z_{max} واحسب قيمتيهما

تمرين 2

نعتبر نابضا مرنا رأسيا لفاته غير متصلة ، طوله الأصلي l_0 وكتلته مهملة وصلابته k . نثبت أحد طرفيه ونربط بالطرف الأخر جسما صلبا S كتلته $m=200g$ فيصير طوله l

$l_0=12.0cm$ و $l=14.0cm$

1 ـ أحسب صلابة النابض

2 ـ نزيح الجسم عن موضع توازنه نحو الأسفل تم نطلقه بدون سرعة بدئية نحو الأعلى نحو الأفاصيل الموجبة . أكتب المعادلة الزمنية لحركة النواس .

3 ـ في الحالة الثانية ، وبعد توقف النواس ، نزيح الجسم عن موضع توازنه نحو الأسفل بالمسافة $x_1=2cm$ ثم نطلقه عند اللحظة ذات التاريخ $t=0$ بسرعة بدئية $v_0=0,3m/s$ رأسية ومتجهة نحو الأعلى .
أكتب المعادلة الزمنية لحركة النواس في هذه الحالة . $g = 10m/s^2$

تمرين 3

نعتبر مجموعة تكون متذبذب ميكانيكي مكونة من جسم صلب S كتلته $m=200g$ مثبت في الطرف الحر لنابض صلابته $K=2,5N/m$. تتحرك المجموعة على محور أفقي Ox وعند توازن المجموعة مركز قصور الجسم متطابق مع أصل المحور O . في البداية نعطي للجسم S طاقة ميكانيكية $E_{m0}=2mJ$ (ميليجول) ، نختار طاقة الوضع التقالية منعدمة في المستوى الذي تتحرك فيه G . فتنجز المجموعة تذبذبات حرة حول O .

نزيح الجسم عن موضع توازنه بالمسافة $x=d=+2cm$ ونعطيه سرعة بدئية V_0 في منحى OX

1 ـ انطلاقا من مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية أوجد المعادلة التفاضلية للمجموعة المتذبذبة . واستنتج قيمة نبضها الخاص ω_0 والدور الخاص T_0 للمتذبذب .

2 ـ أوجد الاستطالة القصوية X_m والسرعة القصوية V_m للجسم خلال حركة المتذبذب . حدد قيمة السرعة البدئية V_0 .

3 ـ أوجد المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة المتذبذب .

4 ـ على نفس المبيان مثل تغيرات الطاقة الحركية وطاقة الوضع والطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة الاستطالة x .

تمرين 4

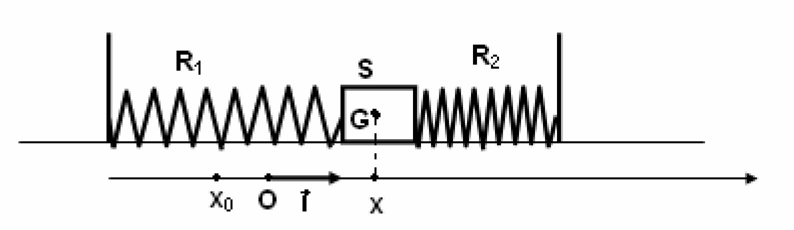
نضع جسم صلب S كتلته m على مستوى أفقي ونثبته بطرفي نابضين مماثلين R_1 و R_2 صلابتهما $k_1=k_2=k=20N/m$. والطول الأصلي لكل من النابضين $\ell_{01}=\ell_{02}=18cm$ وعند التوازن تكون لهما نفس الإطالة $\Delta\ell_1=\Delta\ell_2=2cm$ نعتبر الاحتكاكات مهملة .

نزيح الجسم عن موضع توازنه بالمسافة $x_0=-2cm$ ثم نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة t=0

1 ـ أعط بدلالة x أفصول مركز القصور G للجسم S ، تعبير كل من إطالة النابضين عند اللحظة t .

2 ـ أوجد المعادلة التفاضلية لحركة G . واستنتج تعبير النبض الخاص والدور الخاص لحركة G .

3 ـ أكتب المعادلة الزمنية للحركة .



تمرين 5

ينزلق جسم S كتلته m=15Kg على مستوى مائل بزاوية $\alpha=60°$ بالنسبة للمستوى الأفقي ، و بدون احتكاك . نطلق الجسم من النقطة A بدون سرعة بدئية بحيث يصطدم مع الطرف B لنابض صلابته k=100N/m وطوله الأصلي $l_0=50cm$. كل الاحتكاكات نعتبرها منعدمة . و AB=1.50m

1 ـ احسب طول النابض عندما يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع على المستوى المائل .

2 ـ يلتصق الجسم S مع النابض :

ـ أوجد المعادلة الزمنية للحركة واحسب الدور الخاص للتذبذبات .