تمارين النواس المرن خاصة بالعلوم التجريبية والعلوم الرياضية

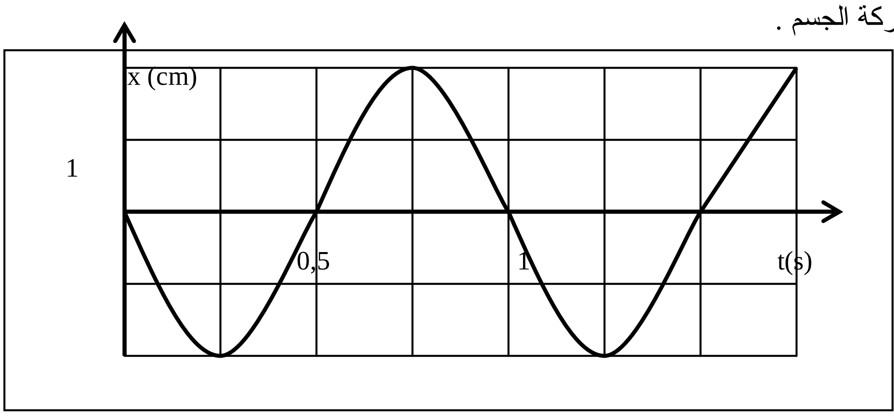
تمرين 1

نعتبر نواسا مرنا أفقيا مكونا من جسم صلب (S) كتلته m=200g مثبت بطرف نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته k .

نزيح الجسم عن موضع توازنه O بالمسافة X_m ونحرره بدون سرعة بدئية . نختار معلما Ox حيث نعلم موضع مركز قصور الجسم بالأفصول OG=x نعتبر جميع الاحتكاكات مهملة .

1 ــ تعطي الدراسة التجريبية منحنى مخطط المسافات x=f(t) .

أ ــ من خلال المنحنى ما هي طبيعة حركة الجسم (S) ؟ حدد قيمتي الوسع X_m والدور الخاص T_0 . استنتج المعادلة الزمنية لحركة الجسم .



ب ــ بتطبيق العلاقة الأساسية لديناميك أوجد المعادلة التفاضلية لحركة الجسم . استنتج قيمة الصلابة k .

2 ــ نعتبر أن الاحتكاكات بين الجسم والسطح الأفقي تكافئ $\vec{f} = -\alpha \frac{dx}{dt}\vec{i}$.

أ ــ بين أن المعادلة التفاضلية في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{\omega_0^2}{m}x = 0$$

ب ــ ما هو نوع الاحتكاكات الموجودة بين الجسم والسطح ؟ أعط شكل المنحنى x=f(t) في حالة الخمود الضعيف .

ج ــ أحسب قيمة شبه الدور T_0 للمتذبذب .

تمرين 2

تمثل العلاقة $x(t)=\pi/3\ (\cos 2\pi t + \pi/4)$ المعادلة الزمنية لحركة متذبذب ميكانيكي مستقيمي جيبي . نعبر عن x بـcm و عن t ب s .

1 ــ من خلال المعادلة الزمنية حدد دور وتردد ووسع التذبذبات .

2 ــ أعط تعبير السرعة والتسارع v(t) و a(t) للمتذبذب في كل لحظة . واستنتج المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب .

3 ــ ما هي الشروط الأولية لهذا المتذبذب الميكانيكي .

تمرين 3

نعتبر جسما S كتلته m=250g ، يمكنه أن يتحرك بدون احتكاك فوق نضد هوائي . نربط الجسم بنابض كتلته مهملة وصلابته k=10N/m . نزيح الجسم عن موضع توازنه بالمسافة X_m=2cm ، ونحرره بدون سرعة بدئية . نختار معلما Ox حيث نعلم موضع G مركز القصور الجسم بالأفصول OG=x .

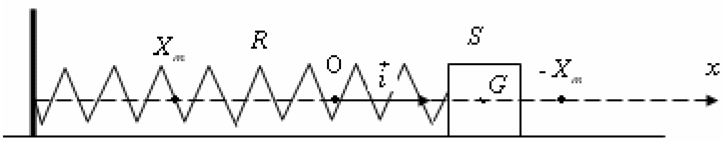
1 ــ بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على الجسم S ،أوجد المعادلة التفاضلية لحركة G . ما هي طبيعة حركة G؟

2 ــ اوجد المعادلة الزمنية للحركة نأخذ كشروط أولية : عند t=0 يمر G من موضع توازنه في المنحى الموجب

3 ــ أوجد v(t) سرعة الجسم S عند اللحظة t .

والسرعة القصوية لحركة الجسم .

4 ــ استنتج من السؤال السابق شدة القوة $\vec{F}$ المطبقة من طرف النابض على الجسم عند مروره من موضع توازنه وعند $x=X_m$ و $x=-X_m$.



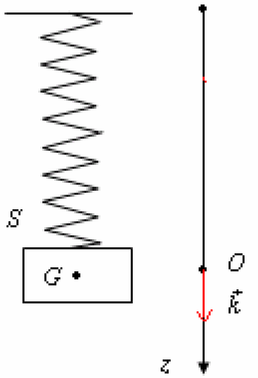
تمرين 4

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من :

ـ نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته $K=40N/m$ مثبت بحامل .

ـ جسم صلب S كتلته $m=100g$ ومركزه G مثبت بالطرف الحر للنابض



1 ـ أوجد إطالة النابض $\Delta\ell$ عند التوازن بدلالة g,K,m واحسب $\Delta\ell$

2 ـ نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع المعلم الفضاء Oz ، بمسافة $Z_m=4cm$ ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة نختارها كأصل للتواريخ .

2 ـ 1 أوجد باعتمادك على الدراسة التحريكية المعادلة التفاضلية المميزة للحركة واستنتج طبيعتها .

2 ـ 2 أكتب المعادلة الزمنية للحركة $z=f(t)$.

2 ـ 3 بين أن سرعة الجسم S لحظة مروره أول مرة من موضع توازنه تكتب $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

أحسب V_1 .

3 ـ ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحى $\vec{k}$. أوجد تعبير المعادلة الزمنية $z=f(t)$ لحركة S في المعلم Oz . نختار لحظة انفصال S عن النابض كأصل للتواريخ .

أجوبة : تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg-K\Delta\ell=0$

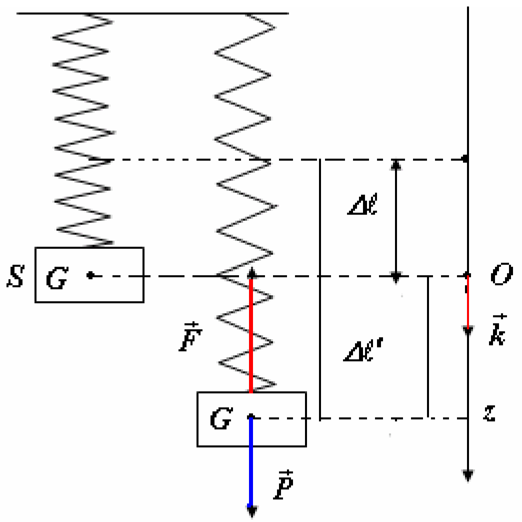
إذن $\Delta\ell=\frac{mg}{K}$ تطبيق عددي $\Delta\ell=2,5cm$

2 ـ1 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك $\vec{P}+\vec{F}'=m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$mg-K\Delta\ell'=m\ddot{z}$ بحيث أن $\Delta\ell'$ إطالة النابض عند اللحظة t $\Delta\ell'=\Delta\ell+z$

عند التوازن $mg-K\Delta\ell=0$ إذن $-Kz=m\ddot{z}$ أي أن المعادلة التفاضلية للحركة هي $\ddot{z}+\frac{K}{m}z=0$ نضع



$\omega_0{}^2=\frac{K}{m}$ وتصبح المعادلة $\ddot{z}+\omega_0{}^2z=0$

إذن فالحركة مستقيمية جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

2 ـ 2 المعادلة الزمنية للحركة

$z=Z_m\cos(\omega_0t+\varphi)$ بحيث أن

$Z_m=4.10^{-2}m$ و $\omega_0=20rad/s$ و عند اللحظة

t=0 عندنا $z=Z_m$ أي أن $\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z=4.10^{-2}\cos(20t)$$

2 ـ 3 نبين أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t) $v=-Z_m\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوية $V_1=\pm Z_m\omega_0$ وبما أنه يمر لأول مرة فسيكون

منحى السرعة عكس المتجهة $\vec{k}$ أي أن $\vec{V}_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}\vec{k}$ أي أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

تطبيق عددي $V_1=0,8m/s$

3 ـ عند انفصال الجسم عن النابض يكون الجسم في سقوط حر تحت تأثير وزنه فقط مع إهمال تأثير الهواء

تسارع الجسم هو $a=g$ ونأخذ $z_0=0$ والسرعة البدئية $V_0=-V_1$

$$z=5t^2+0,8t$$

تمرين 5

نأخذ $g=10m/s^2$ ونهمل جميع الاحتكاكات .

يتكون التركيب التالي من :

بكرة P متجانسة شعاعها r=10cm قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها Δ الثابت والأفقي . $J_\Delta = 10^{-2}\,kg.m^2$

نابض أفقي كتلته مهملة ولفاته غير متصلة وصلابته K=160N/m .

ـ جسم صلب S_1 كتلته m=600g مشدود إلى النابض بواسطة خيط غير مدود وكتلته مهملة ولا ينزلق على مجرى البكرة

نزيح S عن موضع توازنه نحو الأسفل بالمسافة d=2cm ثم نحرره بدون سرعة بدئية عند t=0 نمعلم موضع مركز قصور S عند لحظة t بالأفصول z في معلم Oz الذي يطابق أصله مركز قصور S عند التوازن .

1 ـ اعتمادا على دراسة طاقية أوجد المعادلة التفاضلية لحركة S واستنتج المعادلة الزمنية

2 ـ أجب على نفس السؤال باعتمادك على دراسة تحريكية .

الأجوبة :

1 ـ تعبير الطاقة الميكانيكية

الطاقة الحركية للجسم S : $E_{CS} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ و الطاقة الحركية للبكرة $E_{CP} = \frac{1}{2}J_\Delta\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2$

طاقة الوضع الثقالية للجسم S $E_{PS} = -m\bar{g}z + mgz_{ref}$ عندنا حسب المعلم Oz أن $\bar{g} = g$ إذن

$$E_{Ps} = -mgz + C$$

طاقة الوضع المرنة : $E_{pR} = \frac{1}{2}Ka^2 + C'$ بحيث a إطالة النابض عند اللحظة t $a = \Delta\ell + z$

بحيث $\Delta\ell$ إطالة النابض عند التوازن والتي يجب أن نبين $K\Delta\ell = mg$

إذن $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\left(\frac{\dot{z}}{r}\right)^2 - mgz + C + \frac{1}{2}K(\Delta\ell + z)^2 + C'$

في غياب الاحتكاك تكون الطاقة الميكانيكية منحفظة أي أن $\frac{dE_m}{dt} = 0$

وبعملية الاشتقاق نتوصل إلى $m\ddot{z} + \frac{J_\Delta}{r^2}\ddot{z} - mgz + K\Delta\ell + Kz = 0$

باستعمال العلاقة المحصل عليها عند التوازن $\ddot{z} + \frac{K}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}z = 0$

نستنتج المعادلة الزمنية بنفس الطريقة في التمارين السابقة $z = 2.10^{-2}\cos(10t)$

2 استعمال الدراسة التحريكية

دراسة الجسم S عند التوازن $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg = T$

دراسة البكرة عند التوازن $M_\Delta(T) - M_\Delta(\vec{T}') = 0$ أي أن $T.r - K.\Delta\ell.r = 0$ يعني أن $T = K.\Delta\ell$

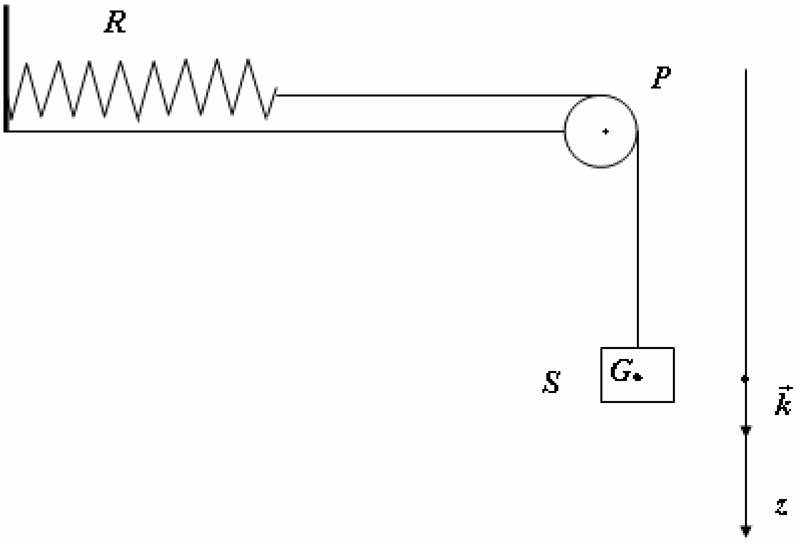
$$mg = K.\Delta\ell$$

عند اللحظة t وبعد إزاحة الجسم عن موضع توازنه بما أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة إذا شغل مركز القصور للجسم S الأنسوب z فإن النابض سيطال بـx=z والبكرة ستدور ب θ $x = z = r\theta$

نطبق العلاقة الأساسية على الجسم S $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ الإسقاط على Oz $mg - T = m\ddot{z}$ (1)

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على البكرة $T.r - K(\Delta\ell + z)r = J_\Delta\left(\frac{\ddot{z}}{r}\right)$

$T = J_\Delta\left(\frac{\ddot{z}}{r^2}\right) + K\Delta\ell + Kz$ نعوض في العلاقة (1) $mg - K\Delta\ell - J_\Delta\left(\frac{\ddot{z}}{r^2}\right) - Kz = m\ddot{z}$



نأخذ بعين الاعتبار العلاقة المحصل عليها عند التوازن $\ddot{z} + \dfrac{K}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}} z = 0$.